

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

на тему **«Обвідна сім'ї еліпсів, яка виникає при  
розв'язку задачі синтезу інерційних керувань  
для двовимірної канонічної системи»**

Виконала: студентка групи МП-41 IV курсу,  
спеціальності 113

Прикладна математика

**Старицька К. О.**

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук  
доцент кафедри

прикладної математики

**Ревіна Т. В.**

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук

професор кафедри

прикладної математики

**Коробов В. І.**

Харків — 2023 рік

## Анотації

**Старицька К. О. Обвідна сім'я еліпсів, яка виникає при розв'язку задачі синтезу інерційних керувань для двовимірної канонічної системи.**

Дана робота присвячена розв'язку задачі синтезу за допомогою методу функції керованості В. І. Коробова. Загальний підхід базується на пошуку розв'язку задачі синтезу інерційних обмежених керувань. Задачу розв'язуємо для двовимірної канонічної системи. Знаходимо параметр у рівнянні на функцію керованості за допомогою методу множників Лагранжа та будуємо траєкторії. Отримані результати проілюстровано для конкретної початкової точки. Також знайдено еліпс, який містить в собі усі інші еліпси сім'ї кривих.

**Starytska K. The envelope of a family of ellipses that arises when solving the inertial control synthesis problem for a two-dimensional canonical system.**

This paper is devoted to the solution of the synthesis problem using the method of controllability function by V.I. Korobov. The general approach is based on the synthesis problem solution of inertial restricted controls. The problem is solved for a two-dimensional canonical system. We find the parameter in the equation of the controllability function using the method of Lagrange multipliers and construct trajectories. The results are illustrated for a certain initial point. An ellipse has been found that encompasses all the other ellipses in the family of curves.

# Зміст

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Анотації</b>                                                                   | <b>2</b>  |
| <b>Вступ</b>                                                                      | <b>4</b>  |
| <b>1. Метод функції керованості</b>                                               | <b>5</b>  |
| 1.1. Метод функції керованості для довільної системи . . . . .                    | 5         |
| 1.2. Синтез інерційних керувань . . . . .                                         | 8         |
| <b>2. Розв’язок задачі синтезу для двовимірної канонічної систе-<br/>ми</b>       | <b>11</b> |
| 2.1. Синтез інерційних керувань для двовимірної канонічної си-<br>стеми . . . . . | 11        |
| 2.2. Обвідна сім’я еліпсів . . . . .                                              | 19        |
| <b>Висновки</b>                                                                   | <b>21</b> |
| <b>Список використаних джерел</b>                                                 | <b>22</b> |

# Вступ

Метод функції керованості, запропонований В. І. Коробовим в роботі [2] у 1979 році, використовується для розв’язання задач позиційного синтезу нелінійних систем. При цьому керування задовільняє заданим обмеженням. Пізніше цей метод був розвинений у роботах Коробова В. І, Скляра Г. М. [4, 5] та інших авторів. Зокрема, у статті [6] був запропонований підхід до розв’язання задач синтезу інерційних керувань. У цій роботі керування, а також його похідні задовільняють обмеженням.

Задачею кваліфікаційної роботи було застосувати результати, отримані у роботі [6], для двовимірної канонічної системи та знайти обмеження на значення  $a_0$  у випадку, коли керування є обмеженим. Цей параметр  $a_0$  використовується у рівнянні на функцію керованості. Була знайдена залежність між  $a_0$  та параметром  $\alpha$ , який є параметром методу, і були побудовані траєкторії для різних значень  $\alpha$ . У статті [6] знайдено  $a_0$  для усіх значень  $\alpha$  у випадку, коли керування та його похідні до  $l$  порядку є обмеженими.

Якщо у рівнянні на функцію керованості покласти, що вона дорівнює 1, то отримаємо сім’ю еліпсів, яка залежить від параметра  $\alpha$ . Крім того, у кваліфікаційній роботі було знайдено еліпс, який містить всі інші еліпси системи, тобто є об’єднанням усіх еліпсів.

# Розділ 1. Метод функції керованості

## 1.1. Метод функції керованості для довільної системи

Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1.1)$$

де  $x \in Q \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ , причому  $\Omega$  таке, що  $0 \in \text{int } \Omega$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

**Означення 1.1.** Під локальним позиційним синтезом обмеженого керування будемо розуміти знаходження такого керування  $u = u(x)$ ,  $x \in Q$ , що:

- 1)  $u(x) \in \Omega$ ;
- 2) траєкторія  $x(t)$  замкненої системи

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad (1.2)$$

яка починається у довільній початковій точці  $x_0 \in Q$ , закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ .

Достатні умови розв'язку задачі синтезу для системи (1.1) вперше були сформульовані в [2].

**Теорема 1.2.** (Коробов В. І. [2]) Розглянемо керований процес (1.1). Нехай  $f(x, u)$  неперервна за сукупністю змінних та в області

$$\{(x, u) : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2, u \in \Omega\}$$

задовільняє умові Ліпшиця

$$\|f(x', u') - f(x'', u'')\| \leq L_1(\rho_1, \rho_2)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Нехай у замкненій області  $G = \{x : \|x\| \leq R\}$  ( $0 < R \leq \infty$ ) існує функція  $\Theta(x)$ , що задовільняє умовам:

- 1)  $\Theta(x) > 0$  при  $x \neq 0$  и  $\Theta(0) = 0$ ;
- 2)  $\Theta(x)$  неперервна всюди и неперервно диференційована всюди, за винятком точки  $x = 0$ ;
- 3) існує  $c > 0$  таке, що  $Q = \{x : \Theta(x) \leq c\}$  обмежена і  $Q \subset \{x : \|x\| < R\}$ ;
- 4) існує функція  $u(x) \in \Omega$  при  $x \in Q$ , така, що справедливі нерівності

$$-\beta_1 \Theta^{1-\frac{1}{\alpha_1}}(x) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta_2 \Theta^{1-\frac{1}{\alpha_2}}(x) \quad (1.3)$$

при деяких додатніх  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ . До того ж  $u(x)$  в області  $K(\rho_1, \rho_2) = \{x : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2\}$  задовільняє умові Ліпшиця

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho_1, \rho_2)\|x'' - x'\|.$$

Тоді траєкторія системи (1.2), що починається у довільній початковій точці  $x(0) = x_0 \in Q$ , закінчується у точці  $x_1 = 0$  в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ , до того ж

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \Theta(x_0)^{\frac{1}{\alpha_1}} \leq T(x_0) \leq \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Theta^{\frac{1}{\alpha_2}}(x_0). \quad (1.4)$$

У роботі [2] вперше запропоновано загальний підхід для розв'язку задачі синтезу допустимих керувань для довільної нелінійної автономної керованої системи. При цьому отримана оцінка на час руху (settling-time function)

із довільної початкової точки в початок координат. Цей метод був розвинутий в роботах Г. М. Скліяра та інших авторів.

У роботі [3] розглянута задача синтезу зворотнього зв'язку для ланцюга системи інтеграторів з неперервним обмеженим невідомим збуренням. Розв'язок базується на методі функції керованості В. І. Коробова.

Розглянута задача побудови керування для лінійної системи в статті [7]. Керування переводить систему з будь-якої точки в задану точку за скінченний час. Ця точка не є точкою спокою для системи. В основі побудови керування лежить метод функції керованості. Неоднозначність розв'язку рівняння, що визначає функцію керованості, призводить до ряду цікавих випадків.

В статті [8] досліджується задача приведення лінійного ланцюга мас, з'єднаних пружинами, до рівноваги за скінченний час за допомогою керуючої сили, прикладеної до першої маси. Описано керування зі зворотнім зв'язком і встановлено його локальну еквівалентність до керування, яке розв'язує задачу швидкодії за мінімальний час. Доведено стійкість керування відносно невідомих збурень і обчислено час руху, а також його асимптотичну оцінку щодо довжини ланцюга.

У роботі [11] детально досліджено так звані стійкі за виходом Лагранжа системи. Розглядається вплив своєрідної неперервності функції встановлення часу. Наведено необхідні та достатні умови стабільності виходу за скінченний час.

## 1.2. Синтез інерційних керувань

Розглянемо задачу локального позиційного синтезу керування для системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u, \quad (1.5)$$

де

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

з обмеженнями на керування та його похідні до заданого порядку  $l$ , тобто задачу побудови керування  $u = u(x)$ , яке переводить довільну початкову точку  $x_0$  з деякого околу  $Q$  початку координат в початок координат по траєкторії  $x(t)$  системи

$$\dot{x} = A_0 x + b_0 u(x), \quad (1.6)$$

за скінченний час  $T(x_0)$  та задовільняє обмеженням

$$|u^{(k)}(x)| \leq d_k, \quad k = 0, 1, \dots, l, \quad l \geq 1, \quad x \in Q, \quad (1.7)$$

де  $u^{(k)}(x)$  – похідна  $k$ -го порядку в силу системи (1.6).

Керування з такими обмеженнями розглядаються в книзі [9, с. 292] та названі інерційними.

Стаття [10] презентує виклики, з якими стикаються оператори енергосистем при збільшенні обсягів використання вітрової енергії. В ній зазначається необхідність впровадження вбудованих функцій керування у контролери вітроелектростанцій, щоб залучити їх до управління енергосистемою. Досліджується реалізація інерційної відповіді та основного регулю-

вання частоти в контролері вітрогенератора. Встановлено та характеризувано основні фактори, що впливають на результати регулювання частоти. Вплив параметрів керування та робочої точки турбіни на інерційну відповідь аналізується за результатами експериментів у системі зі відключеним від мережі живленням. Також розроблено комбіновану схему керування, використовуючи обидва контролера, та обговорюється потенціал отриманої грид-послуги при частковому навантаженні.

Задамо  $\alpha \geq 1$ . Покладемо

$$F_{\alpha}^{-1}(\Theta) = \int_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha} e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt. \quad (1.8)$$

Введемо матрицю  $D(\Theta) = \text{diag}(\Theta^{-(2n-2k+1)/(2\alpha)})_{k=1}^n$ .

В роботі [6, Твердження 1] доведено, що матриця  $F_{\alpha}(\Theta)$  може бути записана в наступному вигляді:

$$F_{\alpha}(\Theta) = D(\Theta)F_{\alpha}D(\Theta), \quad (1.9)$$

де

$$F_{\alpha}^{-1} = \int_0^{\alpha} \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right)^{\alpha} e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt. \quad (1.10)$$

Визначимо при фіксованому  $\alpha \geq 1$  функцію керованості  $\Theta_{\alpha}(x)$  при  $x \neq 0$  як розв'язок рівняння

$$2a_0\Theta = (F_{\alpha}(\Theta)x, x), \quad a_0 > 0, \quad x > 0. \quad (1.11)$$

Це рівняння має при  $\alpha \geq 1$  єдиний додатний неперервно диференційований розв'язок  $\Theta = \Theta_{\alpha}(x)$ . Позначимо  $\Theta_{\alpha}(0) = 0$ , отримаємо неперервність функції  $\Theta_{\alpha}(x)$  для усіх  $x$ .

Задамо область  $Q_{\alpha} = \{x : \Theta_{\alpha}(x) \leq c_{\alpha}\}$ . Задамо керування  $u_{\alpha}(x)$  в області  $Q_{\alpha} \setminus \{0\}$  формулою

$$u_{\alpha}(x) = -\frac{1}{2} b_0^* F_{\alpha}(\Theta_{\alpha}(x))x = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{f_{ni}x_i}{\Theta_{\alpha}^{\frac{n-i+1}{\alpha}}(x)}. \quad (1.12)$$

**Теорема 1.3.** (Коробов В. І., Скорик В. О. [6, Теорема 1]) Нехай число  $\alpha_0 = 2l + 1$  і коефіцієнт  $a_0$  рівняння (1.11) задовільняє умові

$$0 < a_0 \leq \hat{a}_0 = \min_{0 \leq k \leq l} \frac{d_k^2}{2\omega_k^2 \|F_\infty^{-1}\|}, \quad (1.13)$$

де

$$\omega_k = \frac{1}{2} \|F_{2l+1}\| \prod_{i=1}^k \left( \frac{n+i-1}{2l+1} + 1 + \frac{1}{2} \|F_{2l+1}\| \right), \quad k = 0, 1, \dots, l. \quad (1.14)$$

Тоді множина керувань  $u_\alpha(x)$  ( $\alpha_0 \leq \alpha < \infty$ ) вигляду (1.12) в області  $\mathbb{Q} \setminus \{0\} = \{x : \Theta_{\alpha_0}(x) \leq 1\} \setminus \{0\}$  розв'язує для системи (1.5) задачу локального позиційного синтезу інерційних керувань, кожне з яких задовільняє обмеженням (1.7), причому час руху  $T_\alpha(x_0)$  з довільної початкової точки  $x_0 \in \mathbb{Q}$  у початок координат по траєкторії системи (1.6), породженої керуванням  $u_\alpha(x)$ , дорівнює  $\alpha \Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$ .

**Лема 1.4.** (Коробов В. І., Скорик В. О. [6, Лема 1]) Нехай  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ . Тоді для  $0 < c \leq 1$  виконується  $Q_{\alpha_1}(c) \subset Q_{\alpha_2}(c)$ .

## Розділ 2. Розв’язок задачі синтезу для двовимірної канонічної системи

### 2.1. Синтез інерційних керувань для двовимірної канонічної системи

Розглянемо канонічну систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (2.1)$$

при обмеженнях на керування  $|u| \leq 1$ .

Потрібно знайти обмежене керування  $u = u(x)$  таке, що траєкторія замкненої системи, яка починається у довільній початковій точці  $x_0 \in Q$ , закінчується у початку координат в деякий скінченний момент часу  $T(x_0)$ .

Пояснимо механічний зміст системи (2.1) за допомогою задачі про зупинку візка на рейках. По гладким горизонтальним рейкам рухається без тертя під дією тільки сили тяги двигуна візок. У початковий момент часу швидкість візка  $V_0$ , та він знаходиться на заданій відстані  $S_0$  від станції. Потрібно знайти закон керування сили тяги двигуна так, щоб візок за скінченний час досяг станції та зупинився там. За допомогою другого закону

Ньютона отримаємо систему:

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = F_0(t), \\ x(t_0) = S_0, \\ \dot{x}(t_0) = V_0, \\ x(t_1) = 0, \\ \dot{x}(t_1) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$|F(t)| \leq M$  сила тяги двигуна обмежена. Зробимо заміну змінних:

$$x(t) = x_1(t), \dot{x}(t) = x_2(t), \frac{F(t)}{m} = u(t)$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

з початковими умовами  $x_1(t_0) = S_0, x_2(t_0) = V_0, x_1(t_1) = 0, x_2(t_1) = 0$  при обмеженні на керування  $|u(t)| \leq \frac{M}{m}$ . Для спрощення будемо вважати, що  $\frac{M}{m} = 1$ .

В статті [1] запропоновано розширений набір обмежених стабілізуючих позиційних керувань для двовимірної канонічної системи. Для побудови керувань, що залежать від певного параметра, використовується метод функції керованості В. І. Коробова. Розширення засноване на збільшенні інтервалу зазначеного параметра, а також використання неоднозначності функції керованості для деяких областей фазового простору  $R^2$ .

Запишемо систему в матричному вигляді  $\dot{x} = A_0x + b_0u$ , де

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Знайдемо матрицю  $e^{-A_0t}$ . Так як  $A_0^2 = 0$  (нульова матриця), то  $e^{-A_0t} = I - A_0t$ , отже

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Визначимо матрицю  $F_\alpha^{-1}(\Theta)$  з формули (1.8)

$$\begin{aligned}
 F_\alpha^{-1}(\Theta) &= \int_0^{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt, \\
 e^{-At} &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -0 & 1 \end{pmatrix}. \\
 e^{-At} b_0 &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} \\
 b_0^* e^{-A_0^* t} &= \begin{pmatrix} -t & 1 \end{pmatrix} \\
 e^{-At} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} &= \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \\
 F_\alpha^{-1}(\Theta) &= \int_0^{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha t^2 & -\left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha t \\ -\left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha t & \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha \end{pmatrix} dt
 \end{aligned}$$

Порахуємо елементи матриці

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \int_0^{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha t^2 dt = \left[ \int u dv = uv - \int v du \right] = \\
 [dv &= \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha dt; v = -\frac{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1}; u = t^2; du = 2t dt] = \\
 -\frac{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} t^2}{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} \Big|_0^{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} &- \int_0^{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} -\frac{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} 2t dt = \\
 0 + \frac{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \int_0^{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} 2t dt &= \frac{2\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta_\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} 2t dt = \\
 \frac{2\alpha^3\Theta_\alpha^{3/\alpha}}{6 + 11\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22} &= \int_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha dt = -\frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} \Big|_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} = \\
&= -\frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \left(1 - \frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} + \frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} (1 - \Theta)^{\alpha+1} = \frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \\
-M_{12} &= -M_{21} = \int_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha t dt = \left[ \int u dv = uv - \int v du \right] = \\
&= \left[ dv = \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha dt; v = -\frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1}; u = t; du = dt \right] = \\
&= -\frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} t \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} \Big|_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} - \int_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} -\frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} dt = \\
&= 0 + \frac{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha+1} \int_0^{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\Theta^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha+1} dt = \frac{\alpha^2\Theta^{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha^2 + 3\alpha + 2}
\end{aligned}$$

Отже, матриця  $F_\alpha^{-1}(\Theta)$  має вигляд

$$F_\alpha^{-1}(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha^3\Theta^{3/\alpha}}{6 + 11\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3} & -\frac{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}{2 + 3\alpha + \alpha^2} \\ -\frac{\alpha^2\Theta^{2/\alpha}}{2 + 3\alpha + \alpha^2} & \frac{\alpha\Theta^{1/\alpha}}{1 + \alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Тоді,

$$\begin{aligned}
F_\alpha(\Theta) &= \frac{1}{M_{11}M_{22} - M_{21}M_{12}} \begin{pmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{pmatrix}, \\
F_\alpha(\Theta) &= \begin{pmatrix} \frac{(2+\alpha)^2(3+\alpha)\Theta^{-3/\alpha}}{\alpha^3} & \frac{(2+\alpha)(3+\alpha)\Theta^{-2/\alpha}}{\alpha^2} \\ \frac{(2+\alpha)(3+\alpha)\Theta^{-2/\alpha}}{\alpha^2} & \frac{2(2+\alpha)\Theta^{-1/\alpha}}{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Позначимо  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , тоді при  $\alpha \geq 1$  рівняння на функцію керованості має вигляд

$$2a_0\Theta = (F_\alpha(\Theta)x, x).$$

Запишемо докладно.  $2a_0\Theta =$

$$= \left( \left( \frac{(2+\alpha)^2(3+\alpha)\Theta^{-3/\alpha}}{\alpha^3}x_1 + \frac{(2+\alpha)(3+\alpha)\Theta^{-2/\alpha}}{\alpha^2}x_2 \right), \left( \frac{(2+\alpha)(3+\alpha)\Theta^{-2/\alpha}}{\alpha^2}x_1 + \frac{2(2+\alpha)\Theta^{-1/\alpha}}{\alpha}x_2 \right) \right) = \frac{(2+\alpha)\Theta^{-3/\alpha}(x_1^2(6+5\alpha+\alpha^2) + 2x_1x_2\alpha(3+\alpha)\Theta^{1/\alpha} + 2x_2^2\alpha^2\Theta^{2/\alpha})}{\alpha^3}. \quad (2.8)$$

Отже, керування (1.12) має вигляд

$$u_\alpha(x) = -\frac{1}{2} b_0^* F_\alpha(\Theta_\alpha(x))x, \\ u_\alpha(x_1, x_2) = -\frac{(2+\alpha)\Theta^{-2/\alpha}(x_1(3+\alpha) + 2x_2\alpha\Theta^{1/\alpha})}{2\alpha^2}. \quad (2.9)$$

Де  $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$  - єдиний додатний розв'язок рівняння (2.8)

Далі буде показан спосіб, який буде використано для знаходження  $a_0$ . Доведемо обмеженість керування (2.9). Для цього при фіксованому  $\Theta$  розв'яжемо задачу знаходження екстремума функції (2.9) при обмеженнях вигляду (2.8). Побудуємо функцію Лагранжа

$$L = -\frac{(2+\alpha)\Theta^{-2/\alpha}(x_1(3+\alpha) + 2x_2\alpha\Theta^{1/\alpha})}{2\alpha^2} - \lambda(2a_0\Theta - \frac{(2+\alpha)\Theta^{-3/\alpha}(x_1^2(6+5\alpha+\alpha^2) + 2x_1x_2\alpha(3+\alpha)\Theta^{1/\alpha} + 2x_2^2\alpha^2\Theta^{2/\alpha})}{\alpha^3}) \quad (2.10)$$

Далі розв'язуємо наступну систему рівнянь відносно  $x_1$  та  $x_2$

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = 0 \\ \frac{dL}{dx_2} = 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

яка має вигляд

$$\begin{cases} -\frac{(2+\alpha)(3+\alpha)\Theta^{-\frac{2}{\alpha}}}{2\alpha^2} + \frac{(2+\alpha)\Theta^{-\frac{3}{\alpha}}(2(6+5\alpha+\alpha^2)x_1 + 2\alpha(3+\alpha)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}x_2)\lambda}{\alpha^3} = 0 \\ -\frac{(2+\alpha)\Theta^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} + \frac{(2+\alpha)\Theta^{-\frac{3}{\alpha}}(2\alpha(3+\alpha)\Theta^{\frac{1}{\alpha}}x_1 + 4\alpha^2\Theta^{\frac{2}{\alpha}}x_2)\lambda}{\alpha^3} = 0 \end{cases}$$

Отримали  $x_1 = 0$  та  $x_2 = \frac{1}{4\lambda}$ .

Підставимо ці розв'язки у рівняння на функцію керованості (2.8) та знайдемо  $\lambda$ .

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{2+\alpha}\Theta^{1/2(-1-1/\alpha)}}{4\sqrt{a_0}\sqrt{\alpha}}$$

Підставимо знайдені  $x_1$  та  $x_2$  у наше керування, отримуємо

$$u_\alpha = \pm \frac{\sqrt{a_0}\sqrt{2+\alpha}\Theta^{-\frac{1+\alpha}{2\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}.$$

У розв'язок підставимо  $\Theta = 1$ , тобто далі будемо розглядати розв'язок задачі при  $x \in Q = \{x : \Theta(x) \leq 1\}$ . Отриманий елемент обмежуємо  $\frac{\sqrt{a_0}\sqrt{2+\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \leq 1$  при  $\alpha \geq 0$ . Отримали  $a_0 \leq \frac{\alpha}{2+\alpha}$ .

$$\text{Виберемо } \boxed{a_0 = \frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

Для знаходження траєкторії достатньо розв'язати рівняння (2.8) тільки в початковій точці. Нехай  $\Theta(x_0) = \theta_0$  – єдиний додатний корінь рівняння (2.8) при  $x = x_0 \in Q$ . Позначимо  $\theta(t) = \Theta(x(t))$ . В силу Теорема 2 виконується  $\dot{\theta} = -\theta^{1-1/\alpha}$ . Траєкторія є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{(2+\alpha)(x_1(3+\alpha)\theta^{-2/\alpha} + 2x_2\alpha\theta^{-1/\alpha})}{2\alpha^2} \\ \dot{\theta} = -\theta^{1-1/\alpha}, \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (2.12)$$

Беремо початкову точку  $x^0 = (0.2; -0.5)^*$

Розглянемо задачу при різних  $\alpha$ :

Візьмемо  $\alpha = 1$ ,  $x_1(0) = 0.2$ ,  $x_2(0) = -0.5$ .

Рівняння на функцію керованості буде мати вигляд:

$$7.2\Theta - 4.5\Theta^2 + 2\Theta^4 = 4.32$$

Єдиний додатний корінь рівняння на функцію керованості:  $\theta_0 \approx 0.93$ .

При цьому керування має вигляд:  $u = -\frac{3(4x_1 + 2x_2\Theta)}{2\Theta^2}$ ,  $\dot{\theta} = -1$ .

Траєкторія є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{3(4x_1 + 2x_2\Theta)}{2\Theta^2}, \\ \dot{\theta} = -1, \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (2.13)$$

Візьмемо  $\alpha = 3$ ,  $x_1(0) = 0.2$ ,  $x_2(0) = -0.5$ .

Рівняння на функцію керованості буде мати вигляд:

$$90\Theta^{\frac{1}{3}} - 112.5\Theta^{\frac{2}{3}} + 162\Theta^2 = 30$$

Єдиний додатний корінь рівняння на функцію керованості:  $\theta_0 \approx 0.39$

При цьому керування має вигляд:  $u = -\frac{5(6x_1 + 6x_2\Theta^{\frac{1}{3}})}{18\Theta^{\frac{2}{3}}}$ ,  $\dot{\theta} = -\theta^{2/3}$ .

Траєкторія є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{5(6x_1 + 6x_2\Theta^{\frac{1}{3}})}{18\Theta^{\frac{2}{3}}}, \\ \dot{\theta} = -\theta^{2/3}, \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

Візьмемо  $\alpha = 5$ ,  $x_1(0) = 0.2$ ,  $x_2(0) = -0.5$ .

Рівняння на функцію керованості буде мати вигляд:

$$392.\Theta^{\frac{1}{5}} - 612.5\Theta^{\frac{2}{5}} + 1250\Theta^{\frac{8}{5}} = 109.76$$

Єдиний додатний корінь рівняння на функцію керованості:  $\theta_0 \approx 0.3$

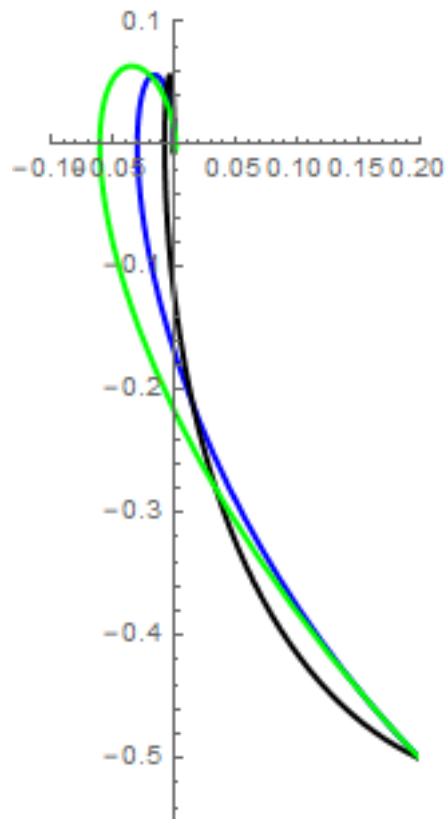
При цьому керування має вигляд:  $u = -\frac{7(8x_1 + 10x_2\Theta^{\frac{1}{5}})}{50\Theta^{\frac{2}{5}}}$ ,  $\dot{\theta} = -\theta^{4/5}$ .

Траєкторія є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{7(8x_1 + 10x_2\Theta^{\frac{1}{5}})}{50\Theta^{\frac{2}{5}}}, \\ \dot{\theta} = -\theta^{4/5}. \\ x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

На мал. 1 показано 3 траєкторії при різних значеннях  $\alpha$ :

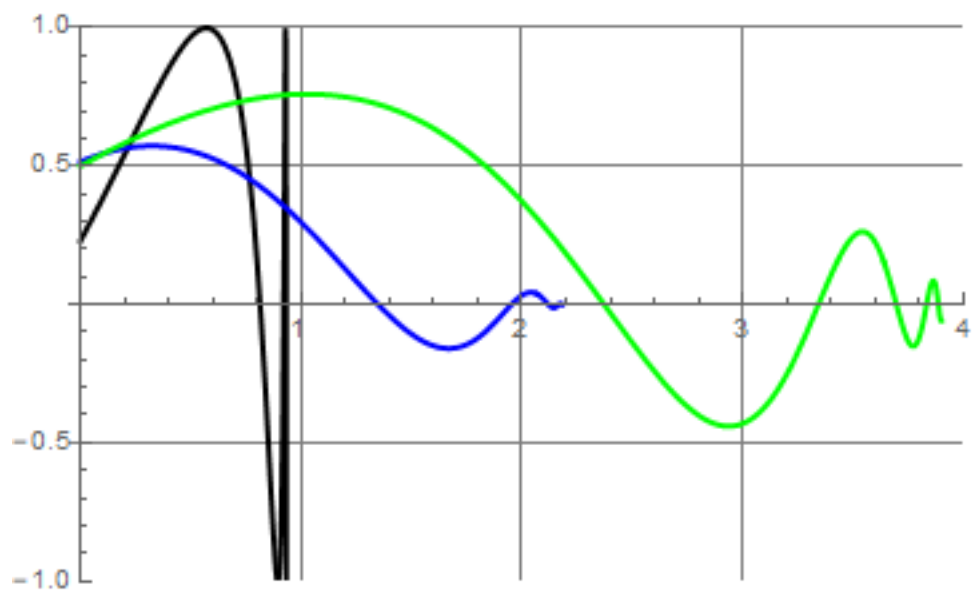
— -  $\alpha = 1$  — -  $\alpha = 3$  — -  $\alpha = 5$



мал.1

На мал. 2 показано 3 графіка керування при різних значеннях  $\alpha$ :

— -  $\alpha = 1$  — -  $\alpha = 3$  — -  $\alpha = 5$



мал.2

## 2.2. Обвідна сім'ї еліпсів

Рівняння на функцію керованості має вигляд:

$$2\alpha^2\Theta = (2 + \alpha)^2\Theta^{-3/\alpha}(x_1^2(6 + 5\alpha + \alpha^2) + 2x_1x_2\alpha(3 + \alpha)\Theta^{1/\alpha} + 2x_2^2\alpha^2\Theta^{2/\alpha}). \quad (2.16)$$

Підставимо  $\Theta = 1$ :

$$2\alpha^4 = (2 + \alpha)^2(x_1^2(6 + 5\alpha + \alpha^2) + 2x_1x_2\alpha(3 + \alpha) + 2x_2^2\alpha^2). \quad (2.17)$$

Отже, якщо позначити  $Q = \{x : \Theta_\alpha(x) \leq 1\}$ , то за лемою 1.4 при  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  виконується  $Q_{\alpha_1}(1) \subset Q_{\alpha_2}(1)$ .

При  $\alpha = 1$  рівняння має вигляд:

$$108x_1^2 + 72x_1x_2 + 18x_2^2 = 2$$

При  $\alpha = 10$ :

$$5616x_1^2 + 9360x_1x_2 + 7200x_2^2 = 5000$$

При  $\alpha = 100$ :

$$13663053x_1^2 + 26790300x_1x_2 + 26010000x_2^2 = 25000000$$

Обвідною сім'ї кривих називається крива, яка в кожній своїй точці дотикається до однієї з кривих даної сім'ї, тобто вона обмежує усі криві сім'ї. Будемо називати за аналогією обвідною випадок, коли в рівнянні (2.17) параметр  $\alpha$  прямує до нескінченності.

Візьмемо  $\Theta = 1$ .

$$F_\alpha^{-1}(1) = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha^3}{6 + 11\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3} & -\frac{\alpha^2}{2 + 3\alpha + \alpha^2} \\ -\frac{\alpha^2}{2 + 3\alpha + \alpha^2} & \frac{\alpha}{1 + \alpha} \end{pmatrix}.$$

Перейдемо до границі в кожному елементі при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

$$F_\alpha^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

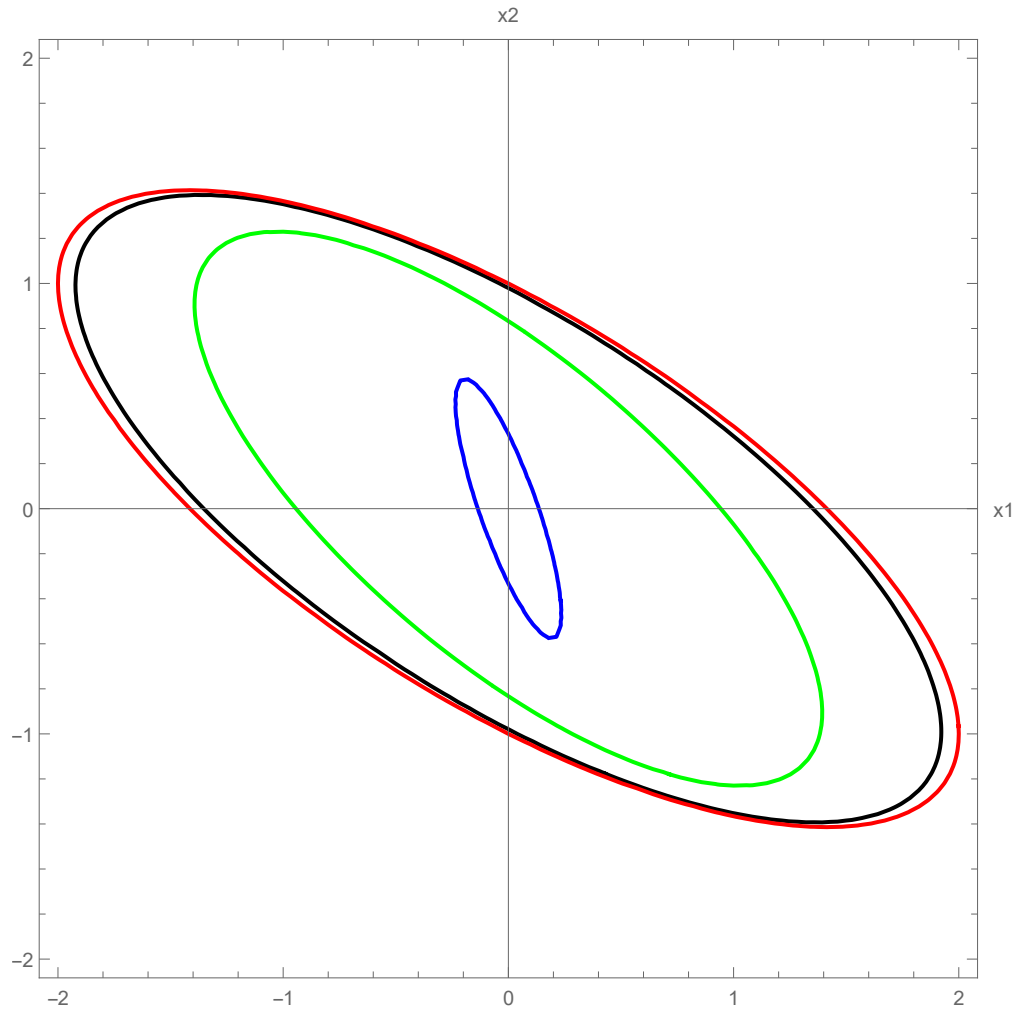
$$\text{Тоді } F_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2a_0\Theta = (F_{\alpha}(\Theta)x, x)$$

$$\begin{aligned} \text{При } \alpha \rightarrow \infty \quad a_0 &= 1 \\ 2 &= \left( \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ 2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

На мал.3 зображено отримані еліпси:

—  $\alpha = 1$  —  $\alpha = 10$  —  $\alpha = 100$  —  $\alpha = \infty$



мал.3

## Висновки

В ході дослідження було проведено застосування методу функції керованості В. І. Коробова для двовимірної канонічної системи та встановлено обмеження на значення  $a_0$  в умовах обмеженого керування. Метод, який використовувався у кваліфікаційній роботі, запропонований у роботі [6] для розв'язку задачі синтезу інерційних керувань, тобто керувань, які є обмеженими до похідної порядку  $l$ . Також була виявлена залежність між  $a_0$  і параметром  $\alpha$ . Для демонстрації результатів були побудовані траєкторії для різних значень  $\alpha$ . Якщо у рівнянні на функцію керованості покласти, що вона дорівнює 1, то отримаємо сім'ю еліпсів, яка залежить від параметра  $\alpha$ . Крім того, у кваліфікаційній роботі було знайдено еліпс, який містить всі інші еліпси системи, тобто є об'єднанням усіх еліпсів. Також було вивчено необхідний матеріал, пов'язаний з методом функції керованості, методом розв'язку задачі інерційного синтезу. Чисельний розв'язок було запрограмовано в додатку "Matematica 11.0".

## Список використаних джерел

- [1] Choque-Rivero AE. Extended set of solutions of a bounded finite-time stabilization problem via the controllability function, IMA J. Math. Control and Information. 2021;38(4):1174-1188, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnab028>
- [2] Korobov V. I. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem. Math. USSR Sb. 1980, 37(4):535-557, <https://doi.org/10.1070/SM1980v037n04ABEH002094>
- [3] Korobov V. I., Revina T. V. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system// IMA J. Math. Control and Information, 2021, 38(1):396-416, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035>
- [4] Korobov V. I., Sklyar G.M. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. Dif. Equ. 1990;26(11):1422-1431
- [5] Korobov V. I., Sklyar G.M. Local and global exact controllability in Hilbert space// Журнал математичної фізики, аналізу, геометрії 4.1/2 (1997): 84-103.
- [6] Korobov V. I., Skoryk V. O. Synthesis of restricted inertial controls for systems with multivariate control// Journal of mathematical analysis and applications 2002, 275(1): 84-107. [https://doi.org/10.1016/S0022-247X\(02\)00243-3](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00243-3)

- [7] Korobov VI, Stiepanova K, The peculiarity of solving the synthesis problem for linear systems to a non-equilibrium point. J. Math. Phys. Anal. Geom. 2021;17(3):326-340, <https://doi.org/10.15407/mag17.03.326>
- [8] Ovseevich A, Ananievski I. Robust feedback control for a linear chain of oscillators. J. Optim. Theory Appl. 2021;188:307-316, <https://doi.org/10.1007/s10957-020-01765-z>
- [9] Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York. 1962
- [10] Ye Wang, Gauthier Delille, Herman Bayem, Xavier Guillaud and Bruno Francois. High Wind Power Penetration in Isolated Power Systems—Assessment of Wind Inertial and Primary Frequency Response. IEEE Transactions on Power Systems, August 2013; 28(3), <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2013.2240466>
- [11] Zimenko K, Efimov D, Polyakov A, Kremlev A. On necessary and sufficient conditions for output finite-time stability. Automatica. 2021;125,109427